Table des matières

Méthodes 6 — Espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif. Dans la pratique, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E désignera un $\mathbb{K}$-ev.

I Comment montrer qu'un ensemble donné est un espace vectoriel ?

Méthode 1: Montrer que c'est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Les espaces vectoriels les plus connus sont les suivants :

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$
- $\mathcal{F}(X,E)$, où X est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel
- $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$
- $\mathcal{L}(E,F)$ où E,F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels
- $\mathcal{C}^k(\mathcal{D},\mathbb{R})$, où $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ et $\mathcal{D}$ un ensemble quelconque.
- $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions $f:I\to\mathbb{R}$ dérivables.)

Remarque :

- Il est extrêmement rare de revenir à la définition d'un espace vectoriel.
- Un espace vectoriel E n'est jamais vide, il contient toujours au moins $\vec{0}_E$. (le vecteur nul)
- Dans les exemples fondamentaux ci-dessus, il faut connaître les lois, les neutres et la définition de " = ".

Montrer dans chacun des cas suivants que A est un espace vectoriel.

1. $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x-2y+3z=0\right\}$
2. $A=\left\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \exists(a,A)\in\mathbb{R}^2\ :\ \forall x\in\mathbb{R},\quad |x|\geqslant a\Longrightarrow\ |f(x)|\leqslant A|x|\right\}$

Méthode 2: Écrire l'ensemble comme l'espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Montrer que $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x-2y+3z=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in A &\Leftrightarrow x-2y+3z=0\\ &\Leftrightarrow x=2y-3z\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)=(2y-3z,y,z)\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)=y(2,1,0)+z(-3,0,1)\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)\in\mathrm{Vect}\,\{(2,1,0),(-3,0,1)\}\end{aligned}$$

Donc $A=\mathrm{Vect}\,\{(2,1,0),(-3,0,1)\}$.

Montrer que $E=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a&b\\c&b&a\end{pmatrix},a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}M\in E &\iff \text{il existe } (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : M=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\ &\iff M\in\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

Donc $E=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$

Remarque :
L'avantage de cette méthode, c'est qu'elle donne un système générateur, mais l'inconvénient, c'est qu'elle n'est pas toujours possible à mettre en oeuvre suivant la forme initiale donnée à l'ensemble, comme par exemple pour $E=\left\{f\in\mathcal{C}^1([0,1])\ \middle|\ \int_0^1 f=0\right\}$.

Méthode 3: Montrer que E est le noyau ou l'image d'une application linéaire.

Rappel : Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker u$ est un sev de E et $\operatorname{Im} u$ est un sev de F.

Remarque :

Plus généralement, l'image directe ou réciproque d'un ev par une application linéaire est un ev.**(A.D)**

Montrer que $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - 2y + 3z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Considérons $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x - 2y + 3z. \end{array}$

ϕ est une application linéaire **(A.D)** et $A = \ker \varphi$.

Montrer que $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \text{il existe}(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \text{tel que} \begin{cases} x = a + 2b - c \\ y = b - c \end{cases} \right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Considérons $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y - z, y - z). \end{array}$

ϕ est une application linéaire **(à faire)** et $A = \operatorname{Im}\varphi$.

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0, 1]) \ \middle| \ \int_0^1 f = 0 \right\}$. Montrer que E est un sev de $C^1([0, 1])$.

Méthode 4: Écrire l'ensemble comme une intersection de sev.

Rappel : Soit $\{F_i\}_{i \in I}$ une famille de sev d'un ev E, alors l'intersection des F_i est un sev de E.

Soit $A = \left\{ (x, y, z, t) : x - y + z - t = 0 \ et \ x + y - z - t = 0 \right\}$. Montrer que A est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

On pose $F = \left\{ (x, y, z, t) : x - y + z - t = 0 \right\}$ et $G = \left\{ (x, y, z, t) : x + y - z - t = 0 \right\}$.
Alors, F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$ car ce sont les noyaux d'applications linéaires **(A.D.)**
De plus, $A = F \cap G$. A est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Cas de la réunion

On rappelle que la réunion de deux espaces vectoriels **n'est pas** un espace vectoriel !
Toutefois, on a le résultat suivant :

Soient A, B des sev de E. $A \cup B$ est un sev ssi $A \subset B$ ou $B \subset A$.

II Comment montrer l'égalité de deux espaces vectoriels ?

Soient E et F deux espaces vectoriels.

II-1 Dans un cas quelconque (dimension finie ou non)

Méthode 5: On procède par double inclusion comme pour des ensembles quelconques

Exemple 1 :
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $c \neq 0$. Notons 0 l'application nulle. Montrons que

$$\mathbb{R}[X] \cap \left\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid af'' + bf' + cf = 0\right\} = \{0\}$$

On note $A = \left\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid af'' + bf' + cf = 0\right\}$.

On sait que $0 \in \mathbb{R}[X]$ et il est facile de vérifier que $0 \in A$, ainsi,

$$\{0\} \subset \mathbb{R}[X] \cap A$$

D'autre part, soit $P \in \mathbb{R}[X] \cap A$. On a alors $aP'' + bP' + cP = 0$.
Sachant que $\deg P'' \leqslant \deg P' \leqslant \deg P$, comme $c \neq 0$, on sait que

$$\deg(aP'' + bP' + cP) = \deg P$$

mais comme on a $aP'' + bP' + cP = 0$, cela signifie que $\deg P = \deg 0 = -\infty$ et donc que P est un polynôme constant. En réinjectant dans l'équation, on obtient alors $0.0 + b.0 + cP = 0$
et donc, comme $c \neq 0$:

$$P = 0$$

ce dont on déduit que

$$\mathbb{R}[X] \cap A \subset \{0\}.$$

En conclusion des deux inclusions, on a bien

$$\mathbb{R}[X] \cap A = \{0\}.$$

Remarque :
Dans la méthode et l'exemple précédent, on ne tient pas compte du fait que les ensembles sont des espaces vectoriels. On pourrait en tenir compte en démarrant autrement :

Exemple 2 :
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $c \neq 0$. Notons 0 l'application nulle. Montrons que

$$\mathbb{R}[X] \cap \left\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid af'' + bf' + cf = 0\right\} = \{0\}$$

On note $A = \left\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid af'' + bf' + cf = 0\right\}$.

On sait que $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que A est un ensemble de solutions d'une équation différentielle d'ordre 2, dont on sait que c'est un espace vectoriel (de dimension 2 quelquesoient a, b, c. Ainsi, $\mathbb{R}[X] \cap A$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$ et donc

$$\{0\} \subset \mathbb{R}[X] \cap A.$$

Pour la deuxième partie, on peut procéder comme précédemment.

Méthode 6: Si l'égalité à démontrer contient des "Vect" : on procède par double inclusion seulement sur les générateurs

Remarque :
Si $F = \operatorname{Vect}\left\{\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right\}$, pour montrer que $F \subset E$, il suffit de montrer que $\overrightarrow{f_i} \in E$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $f_n : x \mapsto \cos(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et G le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $g_n : x \mapsto \cos^n x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F = G$.

Daprès la définition de F et G, pour montrer que $F \subset G$, il suffit de montrer que $f_n \in G, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
et pour montrer que $G \subset F$, il suffit de montrer que $g_n \in F, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

à vous de jouer. On rappelle à cet effet que

$$\cos(nx) = \mathfrak{Re}\left(e^{inx}\right) = \mathfrak{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^n\right), \qquad e^{ix} = \frac{\cos x + i \sin x}{2}$$

et que

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}.$$

Montrer que $Vect\,(x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x+2), x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x+1)) = Vect\,(\cos, \sin)$.

Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x+2)$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x+1)$. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = \cos(x+2) = \cos x \cdot \cos 2 - \sin x \cdot \sin 2$$
D'où
$$f \in Vect\,(\cos, \sin)\,.$$
De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$g(x) = \sin(x+1) = \sin x \cdot \cos 1 + \sin 1 \cdot \cos x$$
D'où $g \in Vect\,(\cos, \sin)\,.$
Ainsi,
$$A \subset Vect\,(\cos, \sin)\,.$$
Dans l'autre sens, comme on vient de voir que
$$\begin{cases} f(x) & = \cos x \cdot \cos 2 - \sin x \cdot \sin 2 \\ g(x) & = \sin x \cdot \cos 1 + \sin 1 \cdot \cos x \end{cases}$$
on peut par exemple tenter de résoudre ce système (que l'on nomme $\mathcal{S}$) pour obtenir cos et sin en fonction de f et g. *On vous laisse faire ! On va trouver des constantes $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ telles que*
$$\begin{cases} \sin x & = \alpha f(x) + \beta g(x) \\ \cos x & = \lambda f(x) + \mu g(x) \end{cases}$$
ce qui signifie bien que
$$\sin, \cos \in Vect(f, g)$$
et donc au final que
$$A = Vect(\cos, \sin)$$

II-2 Cas particulier : en dimension finie (connues ou calculables facilement)

Méthode 7: Si $F \subset E$, on a $E = F$ dès que $\dim E = \dim F$.

Remarque :

Si $F = \text{Vect}\left\{\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n}\right\}$, pour montrer que $F \subset E$, il suffit de montrer que $\overrightarrow{f_i} \in E$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Exemple 3 :

Montrer que $Vect\,(\cos, \sin) = Vect\,(x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x+2), x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x+1))$.

Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x+2)$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x+1)$. Les deux ensembles dont des ev par définition car ce sont des "vect".

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = \cos(x+2) = \cos x \cdot \cos 2 - \sin x \cdot \sin 2$$
D'où
$$f \in Vect\,(\cos, \sin)\,.$$
De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$g(x) = \sin(x+1) = \sin x \cdot \cos 1 + \sin 1 \cdot \cos x$$
D'où
$$g \in Vect\,(\cos, \sin)\,.$$
Ainsi,
$$A \subset Vect\,(\cos, \sin)\,.$$
Notons également que f et g sont deux fonctions non colinéaires : en effet, posons a, b tels que
$$af + bg = 0.$$
Pour par exemple $x = -1$ et $x = -2$, on a
$$\begin{cases} af(-1) + bg(-1) = 0 \\ af(-2) + bg(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cos 1 = 0 \\ a - b\sin 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a, b = 0$$
et donc f, g sont (libres et donc) non colinéaires, d'où
$$\dim A = 2$$
De même, comme il y a 2 éléments générateurs par définition dans l'autre ev, on est certain que
$$\dim Vect\,(\cos, \sin) \leqslant 2$$
d'où
$$A \subset Vect\,(\cos, \sin) \qquad et \qquad \dim A \geqslant \dim Vect\,(\cos, \sin)$$
on est certain que
$$A = Vect\,(\cos, \sin)$$

III Les familles de vecteurs

Dans cette section, on ne considère que des familles finies.
On pose donc $\mathcal{F} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$ une famille de vecteurs d'un ev E.

III-1 Comment montrer qu'une famille est génératrice ?

Méthode 8:	Montrer que $E = \text{Vect } \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$

c'est-à-dire que tout $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$.

Remarque :

Si on sait déjà que $E = \text{Vect } \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$, il suffit de montrer que chaque $\vec{e_i}$ s'écrit comme combinaison linéaire des $\vec{v_j}$.

On considère dans $\mathbb{R}^n[X]$ la famille de polynômes :

$$\{X^n, X^{n-1}(1+X), X^{n-2}(1+X^2), ..., (1+X^n)\}.$$

Montrer qu'elle est génératrice dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode 9:	Image par une application linéaire surjective

Si $\mathcal{F}$ est l'image par une application linéaire surjective $u \in \mathcal{L}(F; E)$ d'une famille génératrice de F, alors $\mathcal{F}$ est génératrice de E.

Remarque :

1. $\mathcal{F}$ est toujours une famille génératrice de Vect $\{\mathcal{F}\}$.
2. Rappelons que $\mathcal{F}$ est génératrice dès que c'est une sur-famille d'une famille génératrice.
3. Si E est de dimension n, toute famille libre d'au moins n vecteurs est une base (donc génératrice.)

III-2 Comment montrer qu'une famille est libre ?

III.2-a) Cas d'une famille de 2 éléments

Méthode 10:	Si on n'a que 2 vecteurs non nuls. Ils sont libre ssi il sont non proportionnels.

■ Exemple 4 :

La famille $(\cos, \sin)$ est une famille libre car cos et sin sont non nulles et ne sont pas proportionnelles.

Si plus de 2 vecteurs

Deux vecteurs non nuls et non proportionnels forment une famille libre. Mais lorsque leur nombre est supérieur à 3, des vecteurs non nuls et non proportionnels ne constituent pas forcément une famille libre. Cherchez un contre-exemple.

III.2-b) Si la famille est dans un eV de dimension finie

Méthode 11:	Si on dispose d'une base de l'espace, on peut étudier le rang de la matrice des coordonnées

Si on appelle $\mathcal{B}$ une base de l'espace. On note $\mathcal{M}_B(\mathcal{F})$ la matrice des coordonnées de $\mathcal{F}$. Alors on sait que

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est libre ssi } \operatorname{rg}(\mathcal{M}_B(\mathcal{F})) = \operatorname{card}(\mathcal{F})}$$

Montrer que la famille $(X^2 - X + 2,\ X^2 + X - 3,\ X + 2)$ est une famille libre.

On observe que dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ dans lequel se trouvent les trois polynômes de la famille, on a

$$\mathcal{M}_B(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On observe (après calcul) que

$$\operatorname{rg}(\mathcal{M}_B(\mathcal{F})) = 3 = \text{nombre d'éléments dans la famille}$$

et qu'ainsi, la famille est libre.

Méthode 12: Si on dispose d'une base de l'espace, on peut se ramener à un système

Pour obtenir le système, on peut regrouper les coefficients suivant la base connue et utiliser la liberté.

La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
pour $\mathcal{F} = \{(3,-1,2),(1,1,1),(5,1,4)\}$?
pour $\mathcal{F} = \{(X, X(X-1), X^2(X+1)\}$?

Méthode 13: Utiliser la particularité de l'espace

■ Cas d'un espace de polynômes :

Outre les méthodes ci-dessus, on pourra s'interesser aux propriétés des polynômes : racines, degré...
A connaître : toute famille de polynômes **tous non nuls** de degrés **tous différents** est libre.

Pour chacun des cas suivants, la famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
1. $\mathcal{F} = \{1, X, X(X-1), \ldots, X(X-1)\cdots(X-n-1)\}$.
2. $\mathcal{F} = \{X^n, X^{n-1}(1+X), \ldots, (1+X^n)\}$.

III.2-c) Cas général

Méthode 14: On se donne une combinaison linéaire nulle et on montre qu'elle est triviale.

c'est-à-dire : on montre que, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$,

$$\left(\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \ldots, +\lambda_p \overrightarrow{v_p} = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0\right).$$

Remarque :

La preuve est souvent une preuve directe. Il peut arriver que l'on raisonne par l'absurde, pour cela on isole un des vecteurs (dont on aura supposé que le coefficient qui le précède n'est pas nul) et on cherche à aboutir à une contradiction. Il peut aussi arriver que l'on raisonne par récurrence sur la taille de la famille.

Sinon, pour trouver les λ, on peut éventuellement se ramener à un des cas listés ci-dessous.

■ Cas d'un espace de fonctions :

Outre les méthodes ci-dessus, on pourra utiliser : les valeurs particulières, limites en des points judicieux, la dérivation, les DL.. On pourra aussi invoquer un problème de régularité..

Pour chacun des cas suivants, la famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
1. $\mathcal{F} = \{x \to e^x, x \to e^{2x}, x \to e^{3x}\}$.
2. $\mathcal{F} = \{x \to \arctan(x), x \to \arctan(2x), x \to \arctan(3x)\}$.

Méthode 15:

Utiliser une des propriétés suivantes :

- Rappelons que $\mathcal{F}$ est libre dès que c'est une sous-famille d'une famille libre.
- Si E est de dimension n, toute famille génératrice d'au moins n vecteurs est une base (donc génératrice.)
- Si $\mathcal{F}$ est l'image par une application linéaire $u \in \mathcal{L}(F;E)$ injective d'une famille libre, alors $\mathcal{F}$ est libre.
- Soient A et B sont des sev de E tels que $A \cap B = \{0\}$, alors, si $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de A et $\mathcal{G}$ est une famille libre de vecteurs de B, on a que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une famille libre.
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

III-3 Comment montrer qu'une famille est liée ?

Méthode 16:

On montre qu'un des vecteurs de $\mathcal{F}$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Méthode 17:

Utiliser une des propriétés suivantes :

- Rappelons que $\mathcal{F}$ est liée dès que c'est une sur-famille d'une famille liée.
- Rappelons que $\mathcal{F}$ est liée dès qu'elle contient le vecteur nul ou deux fois le même vecteur.
- Rappelons que $\mathcal{F}$ est liée *si et seulement si* un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
- Si E est de dimension n, toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs est liée.

III-4 Comment montrer qu'une famille est une base ?

Une base n'étant pour nous définie que dans le cas de la dimension finie, tous les espaces ci-dessous seront supposés de dimension finie.

Méthode 18:

Si $p = \dim E$, on montre que $\mathcal{F}$ est libre ou que $\mathcal{F}$ est génératrice.

Montrer que $\{X^n, X^{n-1}(1+X), \ldots, (1+X^n)\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode 19:

Si $\mathcal{F}$ est l'image par un isomorphisme $u \in \mathcal{L}(F;E)$ d'une base de E, alors $\mathcal{F}$ est une base.

Remarque :

- Dans un espace vectoriel de dimension finie E, toute famille libre peut être complétée pour devenir une base de E.
- Dans un espace vectoriel de dimension finie E, de toute famille génératrice de E on peut en extraire une base.
- Soient E un espace vectoriel de E et β une base de E, alors tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de β.

IV Comment trouver une base en dimension finie ?

IV-1 Si $A \subset \mathbb{K}^n$ et qu'on sait trouver A tel que $A = \text{Vect}\,\{v_1, \dots, v_s\}$.

Méthode 20: On montre que les $v_1, \dots, v_s$ sont libres (si c'est en effet le cas) et c'est alors une base de A.

Rappel : On rappelle que pour montrer qu'une famille est libre, on dispose des méthodes suivantes :

- poser $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = 0$ puis montrer que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$
- exprimer les $v_1 \dots, v_s$ sous forme matricielle dans une base et montrer que le rang de la matrice est s.

■ Exemple 5 :

Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{(1,0,2), (-1,1,1), (0,1,-2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Clairement, on a $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. Ainsi, $A = Vect(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^3$.

Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre :

On pose la matrice $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$

Alors :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice est donc $3 = card(\mathcal{B})$. Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ et de plus c'est une base de $\mathbb{R}^3$ car $3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Méthode 21: On exprime les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ dans une base et on extrait une famille libre par combinaisons linéaires "de colonnes".

■ Exemple 6 :

Déterminer une base de l'espace vectoriel $A = \text{Vect}\left\{\underbrace{(2,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(3,2,-1)}_{v_2}, \underbrace{(1,1,-1)}_{v_3}, \underbrace{(0,1,-}_{v_4}\right.$

On se place dans la base canonique et on pose la matrice $\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$

Alors :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base de A est donc $(2,1,0), (3,2,-1)$

Calculs

On prendra soin, dans ce cas, de ne faire que des combinaisons linéaires de colonnes.

Déterminer une base de l'espace vectoriel $B = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x + 3y - t = 0\right\}$.

On commence par trouver une famille génératrice de B :
Soit $M = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} M \in B &\Leftrightarrow 2x + 3y - t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 2x + 3y \\ &\Leftrightarrow M = (x,y,z,2x+3y) \\ &\Leftrightarrow M = x(1,0,0,2) + y(0,1,0,3) + z(0,0,1,0) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$M \in B \quad \Leftrightarrow \quad M \in Vect\left((1,0,0,2), (0,1,0,3), (0,0,1,0)\right)$$

et ainsi

$$B = Vect\left((1,0,0,2), (0,1,0,3), (0,0,1,0)\right)$$

Il reste maintenant à en déduire une base comme dans la méthode précédente.

IV-2 Si A est un sev de E de dimension finie.

Méthode : On se ramène au cas précédent en exprimant la famille génératrice de A dans une base de E.

Déterminer une base de l'espace $A = \text{Vect}\left\{2+X, 3+2X-X^2, 1+X-X^2, X-2X^2\right\}$.

On observe que $A \subset \mathbb{R}_2[X]$, qui est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 et de base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. Exprimons la famille $\mathcal{F} = (2+X, 3+2X-X^2, 1+X-X^2, X-2X^2)$ générateurs de A dans cette base sous la forme d'une matrice :

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il reste à faire des combinaisons de colonnes pour arriver à trouver une base. *(Pour information, on trouvera que* $\dim A = 2$ *et on aura donc 2 vecteurs dans la base.)*

V Comment calculer la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ?

Méthode 22: Compter le nombre d'éléments d'une base de E

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$. Déterminer la dimension de E.

Une base de E est $\{X, X^2, \dots, X^n\}$ *(à faire)*.

Il y a n éléments, d'où $\dim E = n$.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 3, -2, 2, 3), \quad \overrightarrow{v_2} = (2, 7, -5, 6, 5), \quad \overrightarrow{v_3} = (1, 2, -1, 0, 4)$$

et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs

$$\overrightarrow{w_1} = (1, 3, 0, 2, 1), \quad \overrightarrow{w_2} = (2, 7, -3, 6, 3), \quad \overrightarrow{w_3} = (1, 1, 6, -2, -1).$$

Déterminer la dimension ainsi qu'une base de F, G et $F \cap G$.

(Attention : ne pas confondre $F \cap G$ *avec* $Vect(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3)$*).*

Méthode 23: Construire un isomorphisme entre E et un ev dont on sait calculer la dimension.

Soit $a \neq 0$ et $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N},\quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\}$. Redémontrer le résultat de cours : $\dim E = 2$ en admettant que l'ensemble des suites est un espace vectoriel muni de la somme et de la multiplication classique par un scalaire.

Posons l'application

$$L : E \to \mathbb{R}^2,\ (u_n) \mapsto (u_0, u_1).$$

On peut montrer que L est une application linéaire *(à faire)*.

De plus, on peut montrer que L est injective en montrant que $\ker L = \{(0)\}$. *(à faire)*.

Pour finir, on peut montrer que pour tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$, il existe une suite $(u_n) \in E$ telle que $L((u_n)) = (x, y, z)$. En effet, il suffit de poser la suite (u_n) telle que $u_0 = x,\ u_1 = y$, puis telle que

$$u_{n+2} = -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

L'application L est donc surjective.

Au final, L est injective et surjective, ce qui fait de L un isomorphisme. Ainsi,

$$\dim E = \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

Méthode 24: Utiliser une formule connue :

$$\dim \mathcal{L}(F, G) = \dim F. \dim G$$

ou

formule du rang

À connaître :

- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$; $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n + 1$; $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_n[X] = n + 1$
- $\dim \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = p.q$. Cas particulier $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$.
- Si E a une structure de $\mathbb{C}$-ev, il a a fortiori une structure de $\mathbb{R}$-ev et

$$\dim_{\mathbb{C}} E = 2 \dim_{\mathbb{R}} E$$

Déterminez la dimension de $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x - 2y + 3z = 0\}$.

(On pourra pose l'application $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$ puis on ira chercher du côté de la formule du rang.)